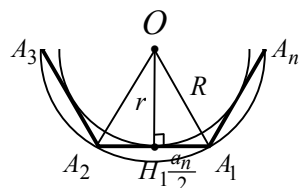


Формула для радиуса окружности, описанной около правильного n -угольника. Запись, вывод

Дано: $A_1A_2A_3\dots A_n$ – правильный n -угольник,
 $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = a_n$,
 $\omega(O; R)$ описана около n -угольника,
 $\omega(O; r)$ вписана в n -угольник.

Выразить: 1) R через r ; 2) R через a_n .

Решение



Соединим точку O с вершинами A_1 и A_2 n -угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$. В получившемся ΔA_1OA_2 проведем высоту $OH_1 = r$.

Так как $OA_1 = OA_2 = R$, то ΔA_1OA_2 – равнобедренный, а высота OH_1 является медианой и биссектрисой,

поэтому $A_1H_1 = \frac{a_n}{2}$, $\angle A_1OH_1 = \frac{\angle A_1OA_2}{2}$.

Так как $A_1A_2A_3\dots A_n$ – правильный n -угольник, то центральный угол $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, а $\angle A_1OH_1 = \frac{360^\circ}{n} : 2 = \frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{n}$.

Так как OH_1 – высота по построению, то ΔA_1OH_1 – прямоугольный. В ΔA_1OH_1

$$\cos \angle A_1OH_1 = \frac{OH_1}{OA_1}; \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{r}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}}};$$

$$\sin \angle A_1OH_1 = \frac{A_1H_1}{OA_1} = \frac{\frac{a_n}{2}}{R}; \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{\frac{a_n}{2}}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{\frac{a_n}{2}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \text{ т.е. } \boxed{R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}}.$$

Ответ: $R = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}}; R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}.$

Если $n = 3$, то $R_3 = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{3}} = \frac{r}{\cos 60^\circ} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r.$

Если $n = 4$, то $R_4 = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{4}} = \frac{r}{\cos 45^\circ} = \frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = r\sqrt{2}.$

Если $n = 6$, то $R_6 = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{6}} = \frac{r}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$

Если $n = 3$, то $R_3 = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{3}} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Если $n = 4$, то $R_4 = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{4}} = \frac{a}{2 \sin 45^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Если $n = 6$, то $R_6 = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{6}} = \frac{a}{2 \sin 30^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2}} = a.$

$$R = \frac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \boxed{r = R \cos \frac{180^\circ}{n}}$$

$$R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \boxed{a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}}$$